19/2/2016

Ορισμός: Μια κλειστή καμπύλη με περίοδο L καλείται απλή $\Longleftrightarrow$ $C|_{[0,L)}$ είναι 1-1

Θεώρημα (H. Hopf): Ο αριθμός περιστροφής κάθε απλής κλειστής καμπύλης είναι ± 1

(Βοηθητικό Λημμα): Έστω $F:[a,b] \to S^1$, συνεχής

$F(x)=(u(x), v(x))$, $x\in[a,b]$: $u^2(x)+v^2(x)=1$

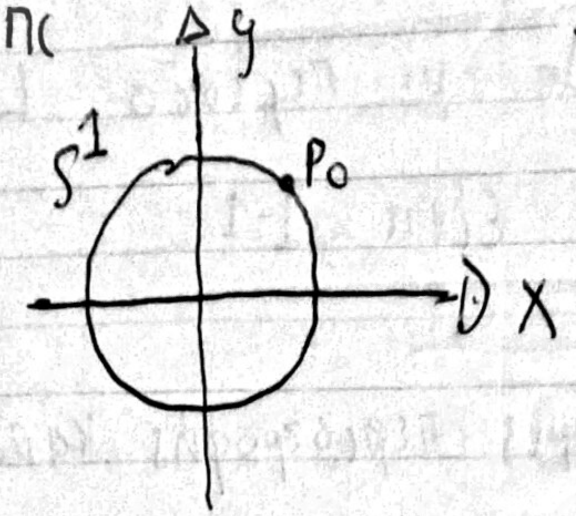
Τότε υπάρχει συνεχής $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ και

$F(x)=(\cos\varphi(x), \sin\varphi(x))$. Η φ καθορίζεται πλήρως από την τιμή στο τυχόν $x_0\in[a,b]$

Ορισμός: Το $A\subseteq\mathbb{R}^n$ καλείται αστερόσχημο αν υπάρχει $x_0\in A$ έτσι ώστε για κάθε $x\in A$ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x_0, x να περιέχεται στο A

Το παραπάνω λήμμα γενικεύεται αν στη θέση του $[a,b]$ βάλουμε ένα σύνολο A αστερόσχημο

Απόδειξη του λήμματος όταν η F δεν είναι επί



Το $P_0 \in S^1 \setminus F(A)$

$P_0 = (\cos\theta, \sin\theta)$ για κάποιο θ

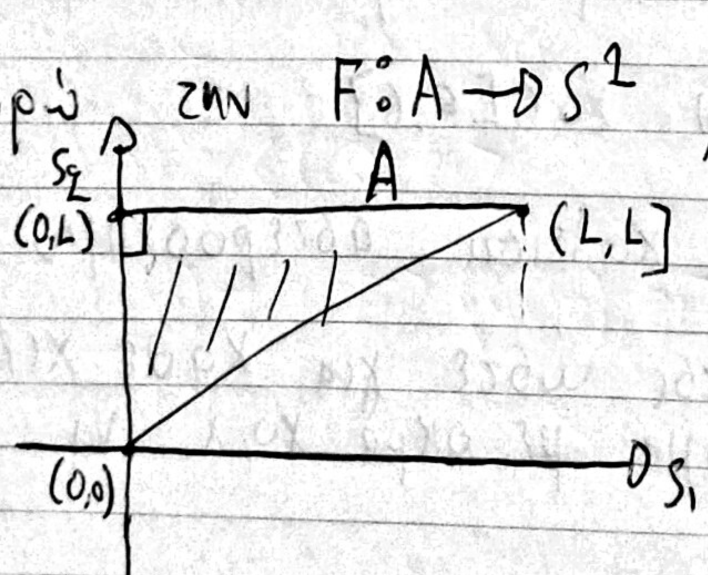
Αν πάρουμε το διάστημα $I = (2k\pi + \theta, 2(k+1)\pi + \theta)$

Τότε $\psi^{-1} = C|_I : I \to S^1 \setminus \{P_0\}$ ομοιομορφισμός

Ορίζω $\varphi : A \to \mathbb{R}$, $\varphi = \psi \circ F$

Απόδειξη <u>Θεωρήματος Hopf</u> :

Θεωρώ την $F : A \to S^1$, A ένα τρίγωνο (ορθογώνιο)



Ορίζουμε την F με τύπο

~~$F(S_1,S_2)$~~

$$F(S_1,S_2) = \begin{cases} \dfrac{c(S_2)-c(S_1)}{\|c(S_2)-c(S_1)\|} & S_1<S_2,\ (S_1,S_2)\neq(0,L) \\ \dot{c}(S) & S_1=S_2=S \\ -\dot{c}(0) & (S_1,S_2)=(0,L) \end{cases}$$

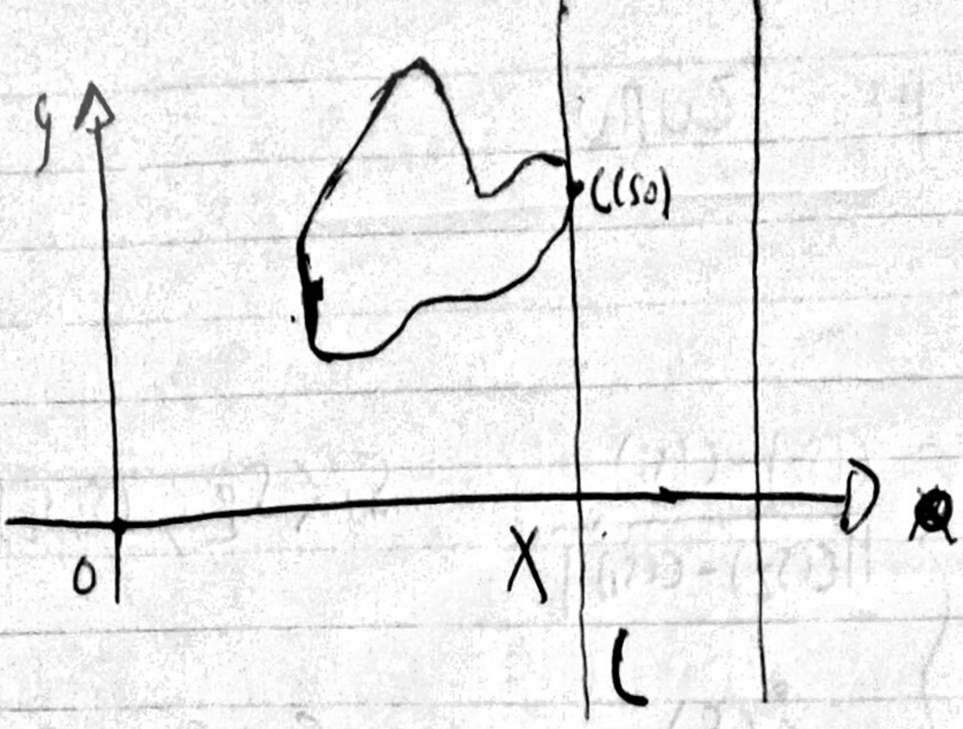
Για τη συνέχεια της F

- Αν $S_1<S_2$, $(S_1,S_2)\neq(0,L)$

$$F(S_1,S_2) = \frac{\dfrac{c(S_2)-c(S_1)}{S_2-S_1}}{\left\| \dfrac{c(S_2)-c(S_1)}{S_2-S_1} \right\|}$$

Τότε $\lim\limits_{(S_1,S_2)\to(S,S)} F(S_1,S_2) = \dfrac{\dot{c}(S)}{\|\dot{c}(S)\|} = \dot{c}(S)$

- Συνέχεια στο $(0,L)$. Θέλουμε το $\lim F(0,S) = -\dot{c}(0)$



$C(s)=(x(s),y(s))$ μεταφέρω την κλειστή καμπύλη, έτσι ώστε η $x(s)$ να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της.

Έστω $x(s_0)=\max x(s)$

Ισχυρισμός: Η ευθεία C είναι εφαπτομένη της C στο s_0

$x(s)=\langle C(s), e_1\rangle$

$\underbrace{\dot{x}(s_0)=0}_{\text{Θ. Fermat}} \Leftrightarrow \langle \dot{C}(s_0), e_1\rangle=0 \Rightarrow \dot{C}(s_0)=\pm e_2$

Υποθέτω ότι $s_0 = 0$ και $\dot{c}(0) = e_2$

από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ (A το τρίγωνο) και

$$F(s_1, s_2) = (\cos\varphi(s_1,s_2), \sin\varphi(s_1,s_2)) \ \forall (s_1,s_2) \in A$$

Αν $s_1 = s_2 = s \Rightarrow \dot{c}(s) = (\cos\varphi(s,s), \sin\varphi(s,s))$

συνεπώς η $\varphi(s,s)$ είναι η γωνιακή συνάρτηση για την c

Τότε $n_c = \dfrac{\varphi(L,L) - \varphi(0,0)}{2\pi} \Rightarrow \varphi(L,L) - \varphi(0,0) = 2n_c\pi$ $(*)$

$$\Rightarrow (\varphi(L,L) - \varphi(0,L)) + (\varphi(0,L) - \varphi(0,0)) = 2n_c\pi$$

$$F(0,s) \overset{L+s\geq 0}{=} \frac{c(s) - c(0)}{\|c(s) - c(0)\|}$$

Η γωνιακή συνάρτηση λαμβάνει τιμές

στο $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2(k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

$\varphi(0,0) = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$

$\varphi(L,L) = \frac{3\pi}{2}$

$\varphi(L,L) - \varphi(0,0) = 2n_c\pi$

$\Rightarrow \boxed{n_c = 1}$

Κυρτές καμπύλες

Ορισμός: Μια καμπύλη $c: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου καλείται κυρτή αν η εφαπτόμενη σε κάθε της σημείο αφήνει την καμπύλη σε ένα ακριβώς από τα δυο ημιεπίπεδα με ακμή την εφαπτομένη

$$\text{Η } c \text{ είναι κυρτή} \overset{\forall s_0 \in [a,b]}{\iff} \langle c(s) - c(s_0), \bar{n}(s_0) \rangle \geq 0 \quad \forall s \in [a,b]$$

$$\text{ή } \langle c(s) - c(s_0), \bar{n}(s_0) \rangle \leq 0 \quad \forall s \in [a,b]$$

Λήμμα: Η c είναι κυρτή $\iff$ $(\forall s_0)\ (\forall s)$ ισχύει $\langle c(s) - c(s_0), \bar{n}(s_0) \rangle \geq 0$

ή $(\forall s_0)\ (\forall s)\ \langle c(s) - c(s_0), \bar{n}(s_0) \rangle \leq 0$

$f(s) = \langle c(s) - c(s_0), \bar{n}(s_0) \rangle \geq 0$

$f(s_0) = 0 \xRightarrow{\text{Θ. Fermat}} f(s) \geq f(s_0) \Rightarrow$ ελάχιστο

$\dot{f}(s_0) = 0$ και $\ddot{f}(s_0) \geq 0$

$\dot{f}(s) = \langle \dot{c}(s), n(s_0) \rangle = \langle \bar{t}(s), n(s_0) \rangle$

$\ddot{f}(s) = \langle \ddot{c}(s), n(s_0) \rangle = \langle \dot{\bar{t}}(s), n(s_0) \rangle = k(s) \langle \bar{n}(s), \bar{t}(s) \rangle$

$\Rightarrow \ddot{f}(s_0) \geq 0 \Rightarrow k(s_0) \geq 0$

Θεώρημα : Κάθε κυρτή καμπύλη $c : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει καμπυλότητα $k \geq 0$ παντού ή $k \leq 0$ παντού

Θεώρημα : Έστω $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ απλή και κλειστή καμπύλη με $k \geq 0$ παντού ή $k \leq 0$ παντού. Τότε η c είναι κυρτή